Ecuaciones en derivadas parciales

Ejercicios del capítulo III

Ejercicio 1. Calcular una fórmula para la solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x,t) \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \\ u(x,0) &= \alpha(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ u_t(x,0) &= \beta(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

donde $c > 0$. Resolver para $f(x,t) = x^2$, $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 0$.

Ejercicio 2. Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= \operatorname{sen}(x) \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \\ u(x,0) &= x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ u_t(x,0) &= x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

en los siguientes casos:

a) $f(x,t) = \operatorname{sen} x$, $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x^2$.
b) $f(x,t) = xe^{-t}$, $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 0$.
c) $f(x,t) = \operatorname{sen} x$, $\alpha(x) = e^{-x^2}$, $\beta(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

En cada caso, calcular $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)$.

Ejercicio 3. Dado el siguiente problema mixto:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad (t \geq 0, x \geq 0) \\ u(x,0) &= x^4 \qquad (x \geq 0) \\ u_t(x,0) &= 1 - \cos(x) \quad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

¿Admite dicho problema solución? Si es así, calcular dicha solución.

Ejercicio 4. Sea el siguiente problema mixto:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad (t \geq 0, x \geq 0) \\ u(x,0) &= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad (x \geq 0) \\ u_t(x,0) &= x^2 \qquad (x \geq 0) \\ u_x(0,t) &= 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Calcular la solución de dicho problema, si existe.

Ejercicio 5. Sea $u(x,t)$ una solución del problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(x) \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \\ u(x,0) &= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ u_t(x,0) &= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

donde $f(x) > 0$ si $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Discutir si $u(x,t) > 0$ o no, dependiendo de x, t.

Ejercicio 6. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3) \\ u(x,0) &= \alpha(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^3) \\ u_t(x,0) &= \beta(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

a) Probar que si $\alpha(x)$, $\beta(x)$ son funciones con simetría radial, entonces $u(x,t)$ también tiene simetría radial.

b) Denotemos $r = |x|$. Usar el método de las medias esféricas para dar una fórmula para $u(r,t)$ en función de $\alpha(r)$, $\beta(r)$.

c) Calcular dicha solución para $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = e^{-|x|^2}$. Usar algún software para simular la propagación de la onda.

Ejercicio 7. Sea $u(x,t)$ una solución de la ecuación de ondas:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \qquad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N) \\ u(x,0) &= \alpha(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \\ u_t(x,0) &= \beta(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

Usar estimas de energía para probar que $u(x,t)$ depende solo de los valores de α, β en la bola $B(x,t)$.

Ejercicio 8. Calcular la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad && 0 \leq x \leq \pi,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \operatorname{sen}^3(x) && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= x(\pi - x) && 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t \geq 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 9. Demostrar que el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \operatorname{sen}(x) && 0 \leq x \leq \pi,\ t \in \mathbb{R}\\
u(x,0) &= 2\operatorname{sen}(x) && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0 && 0 \leq x \leq \pi\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 && t \geq 0
\end{aligned}$$

tiene una única solución u. Definir la energía de la onda u en el tiempo t y comprobar que dicha energía no es constante.

Ejercicio 10. Calcular la única solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} && 0 \leq x \leq \pi,\ t \in \mathbb{R}\\
u(x,0) &= \cos^2(x) && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 2x - \operatorname{sen}(2x) && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. Calcular la única solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos(x) && 0 \leq x \leq \pi,\ t \in \mathbb{R}\\
u(x,0) &= \operatorname{sen}(x) && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0 && 0 \leq x \leq \pi\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

Sugerencia: búsquese la solución de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$.

Ejercicio 12. Calcular la única solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} && 0 \leq x \leq \pi,\ t \in \mathbb{R}\\
u(x,0) &= \operatorname{sen}(x) && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \operatorname{sen}^2(x) && 0 \leq x \leq \pi\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 && t \geq 0.
\end{aligned}$$